Revista PsiPro
PsiPro Journal
2(5): 113-134, 2023
ISSN: 2763-8200

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES COM DUAS VARIÁVEIS APLICADAS À SITUAÇÕES-PROBLEMA NO ENSINO MÉDIO

LINEAR DIOFANTINE EQUATIONS WITH TWO VARIABLES APPLIED TO PROBLEM-SOLVING IN HIGH SCHOOL

Recebimento do original: 09/09/2023
Aceitação para publicação: 17/10/2023

Paulo Vitor Frazão
Graduação em Licenciatura em Matemática – Faculdade Madre Tereza

Carlos Alberto Ferreira da Silva
Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) – Universidade Federal do Amapá – UNIFAP. Graduação em Matemática – UFPA

RESUMO: Esta pesquisa aborda as Equações Diofantinas Lineares com duas variáveis aplicadas à resolução de problemas no ensino médio de matemática. Destaca a importância de trabalhar com essas equações para a aquisição eficaz de conhecimento matemático. Dado que a resolução de problemas é um aspecto fundamental na educação matemática contemporânea, este estudo tem como objetivo destacar a versatilidade e utilidade prática das equações Diofantinas na solução de tipos específicos de problemas enfrentados pelos estudantes. Os objetivos específicos incluem a defesa da introdução das equações Diofantinas como ferramentas de resolução de problemas no cotidiano dos alunos, incentivando-os a buscar soluções por meio de investigação. Isso demonstra como a matemática está intimamente ligada a vários contextos sociais. Esta pesquisa adota uma abordagem bibliográfica e qualitativa, e seus resultados sustentam fortemente a ideia de que a incorporação das Equações Diofantinas Lineares no currículo do ensino médio, dentro de um contexto de resolução de problemas, é altamente relevante no cenário atual da educação matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Equações Diofantinas; Ensino-aprendizagem; Situações-problema.

ABSTRACT: This research delves into the realm of Linear Diophantine Equations with two variables applied to problem-solving in high school mathematics education. It highlights the importance of working with these equations for the effective acquisition of mathematical knowledge. Given that problem-solving is a fundamental aspect of contemporary mathematics education, this study aims to underscore the versatility and practical utility of Diophantine equations in solving specific types of problems encountered by students. The specific objectives involve advocating for teachers to introduce Diophantine equations as problem-solving tools within the everyday experiences of students. By doing so, it encourages students to seek solutions through investigation, demonstrating how mathematics is intricately woven into various social contexts. This research adopts a bibliographic and qualitative approach, and its outcomes strongly support the notion that incorporating Linear Diophantine Equations into the high school curriculum, within a problem-solving framework, is highly relevant in today's mathematics education landscape.

KEYWORDS: Diophantine Equations; Teaching-Learning; Problem-Solving.

1 INTRODUÇÃO

Este artigo explora o tema das "Equações Diofantinas Lineares com duas variáveis aplicadas a situações-problema no Ensino Médio". A pesquisa se baseia em situações-problema específicas para desenvolver uma compreensão mais profunda das equações Diofantinas, com um foco direto no contexto do ensino médio.

No cenário educacional atual, a resolução de problemas desempenha um papel crucial no ensino de matemática. O objetivo central desta pesquisa é destacar a versatilidade e utilidade das equações de Diofanto na solução de problemas específicos, incentivando professores a introduzirem essas equações como ferramentas para resolver desafios do cotidiano dos alunos. Além disso, nossa intenção é demonstrar como o conhecimento matemático está intrinsecamente relacionado a diversos contextos sociais.

Esta pesquisa é justificada pela necessidade de desenvolver estratégias que facilitem a resolução de problemas matemáticos do dia a dia, que frequentemente exigem conhecimento aritmético e algébrico. Tais problemas incorporam as operações fundamentais e variáveis, que são partes essenciais da matemática e que estão presentes em nosso cotidiano.

De acordo com Dante (2007), um dos principais objetivos da educação matemática é estimular os alunos a raciocinar de forma produtiva, apresentando-lhes situações desafiadoras para resolver. Muitas vezes, situações comuns do dia a dia se transformam em problemas matemáticos intrigantes para os estudantes. Por exemplo, o desejo de adquirir itens dos tipos A e B, cada um custando 3 e 4 reais, respectivamente, com um orçamento de 20 reais, levanta a questão de quantos itens de cada tipo podem ser comprados.

Essas perguntas desafiam os alunos a elaborarem suas próprias estratégias e a aplicarem o raciocínio lógico na busca por soluções, promovendo o desenvolvimento de suas habilidades matemáticas. Esta pesquisa adota uma abordagem etnográfica qualitativa e visa contribuir para o estudo das Equações Diofantinas Lineares como uma ferramenta no ensino médio para a resolução de problemas do cotidiano.

Nosso objetivo é demonstrar que as Equações Diofantinas Lineares podem e devem ser utilizadas como uma ferramenta fundamental no ensino médio, especialmente no contexto da resolução de problemas, que é uma tendência de extrema relevância na matemática moderna. A escolha deste tema resulta da subutilização dessa ferramenta nas salas de aula, devido à ausência direta nos currículos do ensino médio e à falta de interesse dos educadores em abordar essa temática.

Ao introduzir as Equações Diofantinas, os professores têm a oportunidade de consolidar conceitos previamente ensinados no ensino fundamental II, como o máximo divisor comum (MDC), o Algoritmo de Euclides (divisões sucessivas), combinações lineares e sistemas de inequações de primeiro grau, que servem como base para resolver equações do tipo ax + by = c.

A relevância de trabalhar com as Equações Diofantinas Lineares é evidente por meio de questões de vestibulares e competições como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Por exemplo, um problema da OBMEP de 2012 perguntava quantas blusas poderiam ser feitas com a compra de botões de 4 centavos e laços de 7 centavos, com um orçamento de R$ 2,99, desafiando os alunos a aplicarem seus conhecimentos matemáticos.

Outro exemplo está em uma questão do vestibular da Universidade Federal do Ceará (UFC-CE/2004), que perguntava sobre o número de faces triangulares em um poliedro convexo com 20 arestas e 10 vértices.

Neste artigo, abordaremos o contexto histórico, destacando a contribuição de Diofanto para a matemática, a definição, propriedades e demonstrações das Equações Diofantinas Lineares, algumas aplicações no ensino médio e ferramentas tecnológicas que podem auxiliar no estudo dessas equações. Além disso, apresentaremos a metodologia adotada e as considerações finais sobre o tema tratado. A próxima seção explorará o contexto histórico, destacando a figura de Diofanto, o matemático por trás das equações Diofantinas, cuja contribuição será discutida detalhadamente.

2 CONTEXTO HISTÓRICO: CONTRIBUIÇÃO DE DIOFANTO PARA A MATEMÁTICA

Diofanto de Alexandria, um notável matemático que se destacou por volta de 250 d.C. na Universidade de Alexandria, é uma figura envolta em mistério quando se trata de detalhes de sua vida pessoal. Pouco se sabe com certeza sobre o período exato de seu nascimento e morte. No entanto, é amplamente aceito que ele nasceu por volta de 200 d.C. em Alexandria, uma cidade grega no Egito, e faleceu aproximadamente em 284 d.C., ainda residindo em Alexandria.

Figura 1. Busto de Diofanto de Alexandria

Fonte: *Storyofmathematics*

Curiosamente, a única informação pessoal concreta sobre Diofanto é encontrada na forma de um enigma matemático preservado na chamada Antologia Grega, datada dos séculos V ou VI. Nesta coleção, um matemático talentoso chamado Antólio, que posteriormente se tornou Bispo de Laodiceia em torno de 270 d.C., escreveu um livro dedicado ao seu amigo Diofanto. Esse livro contém um problema matemático intrigante que permite calcular a idade de Diofanto.

> Deus lhe concedeu ser menino pela sexta parte de sua vida, e somando sua duodécima parte a isso, cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz criança; depois de viver a metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida. (BOYER, 2010, p.121).

De acordo com Boyer (2010), se o epitáfio que supostamente registra a idade de Diofanto estiver correto, ele teria vivido cerca de 84 anos. No entanto, é importante observar que esse não era um problema matemático formal, já que Diofanto não deu uma atenção significativa às equações de primeiro grau em sua obra.

Conforme observado por Rocque e Pitombeira (1991), as obras de Diofanto de Alexandria não se encaixavam na tradição matemática clássica grega, que se assemelhava mais à álgebra elementar praticada nos dias de hoje. Em vez disso, suas obras se aproximavam mais da tradição da álgebra babilônica do que da busca por soluções numéricas exatas. Enquanto os matemáticos babilônicos se concentravam em encontrar soluções aproximadas para equações determinadas, Diofanto dedicava-se a encontrar soluções precisas tanto para equações determinadas quanto para as indeterminadas.

As contribuições de Diofanto de Alexandria estão registradas em três tratados principais: "Aritmética", que consistia em 13 livros, dos quais apenas 6 sobreviveram, abordando tópicos como números poligonais, embora restem apenas alguns fragmentos dessa parte da obra; e "Porismas", que infelizmente se perdeu ao longo do tempo.

Em seu tratado "Aritmética", Diofanto apresentou avanços notáveis na Teoria dos Números, consolidando-se como um gênio matemático de alto calibre. Embora outros matemáticos, como Euclides, já tivessem feito descobertas nessa área, as contribuições de Diofanto foram excepcionais e continuam sendo uma referência importante. O próximo tópico deste artigo abordará definições, propriedades e demonstrações para aprofundar nossa compreensão deste tema fascinante.

3 DEFINIÇÃO, PROPRIEDADES E DEMONSTRAÇÕES

De acordo com Alencar Filho (1981), uma equação diofantina é definida como uma equação linear que envolve duas variáveis, onde os coeficientes de 'x' e 'y' são números inteiros. O que caracteriza uma equação diofantina é o fato de que suas soluções devem ser restritas ao conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$). Para que uma equação diofantina linear do tipo $ax + by = c$ tenha solução, é necessário que o máximo divisor comum (MDC) de 'a' e 'b', denotado como 'd', divida 'c'. Em outras palavras, 'd' deve ser um divisor de 'c'. O formato mais simples de uma Equação Diofantina Linear com duas variáveis é dado por: $ax + by = c$, onde 'a', 'b' e 'c' são inteiros dados, com 'a' e 'b' diferentes de zero.

Para ilustrar essa definição, considere um par de inteiros x_0 e y_0 tal que ax_0 + by_0 = c, representando uma solução válida para a equação diofantina linear com duas variáveis. A seguir, apresentamos um exemplo para elucidar esse conceito:

a b

$$2x + 3y = 5 \Longrightarrow c$$

Utilizando a tabela abaixo pode-se visualizar possíveis soluções

Tabela 1. Soluções particulares

X	Y
- 2	3
1	1
4	- 1
7	- 3
0	- 5

3 3 2 2

Fonte: Os autores

No exemplo acima pode-se visualizar com o esquema das setas quem são os coeficientes de x e y, assim como, o valor de c. A ilustração dos valores da tabela seriam possíveis respostas que o educando do ensino médio poderia ter pensado e ter dado como resposta, além disso, na própria tabela o educando poderia perceber o padrão nas colunas dos valores das possíveis soluções de x e y, e esses padrões vem justamente dos coeficientes de x e y da equação inicial.

Fazendo uma espécie de cruzamento entre ambos, em que, o valor do coeficiente de x influenciará na solução particular de y, assim como, o de y influenciará diretamente na solução particular de x, sendo que essa tabela o aluno poderia construir infinitamente tanto para baixo quanto para cima, pois, quando aumentarem os valores de x na tabela diminuirão os de y, e assim inversamente. Ocorrendo exatamente essa inversão dos coeficientes ilustrados com as setas no exemplo acima. Isso acontece por se utilizar os coeficientes de x e y tanto em soluções particulares, quanto na solução geral, validando assim, a ideia da tabela.

Observação: na geometria analítica a equação ax + by = c retrata uma reta. Ao se buscar as soluções em $\mathbb{Z}$, da equação ax + by = c, na verdade está se questionando se a reta r por ela é representada, engloba pontos que possuam ambas as coordenadas inteiras.

Existem equações diofantinas lineares que não possuem solução. Desta forma por exemplo, a equação 2x + 4y = 7, não tem solução porque 2x + 4y são inteiros pares, quaisquer que sejam os valores inteiros de x e y, enquanto que 7 é um inteiro ímpar. Observa-se que o m.d.c. (2, 4) = 2, e 2 ∤ 7 (2 não divide 7).

Para Sampaio (2008), as principais propriedades das EDL são as listadas e demonstradas abaixo:

Propriedade I: *sejam a, b,* e *c* ∈ $\mathbb{Z}$, a equação do tipo ax + by = c tem solução se, e somente se, o m.d.c. (a, b) **|** c.

Demonstração:

(⇒) suponha-se que (x_0, y_0) é um par de inteiros satisfazendo $ax_0 + by_0$ = c. Sendo d = m.d.c. (a, b), tem-se que d **|** a e d **|** b. Logo d **|** $(ax_0 + by_0)$, ou seja, d **|** c.

(⇐) Seja d = m.d.c.(a, b) e suponha-se que d **|** c. Então c = dγ, para algum $\gamma \in \mathbb{Z}$, existem inteiros r e s tais que *ra* + *sb* = d. Logo*, raγ* + *sbγ = d γ*, ou seja *a(r γ)* + *b(s γ)* = c, e assim (x_0, y_0) = (*r γ, s γ*) é solução de ax + by = c, (Relação de Bézout).

Propriedade II: sendo a e b inteiros, e o m.d.c. (a, b) =1, as soluções da equação diofantina linear ax + by = 0 são dadas pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = bt \\ y = -at \end{cases} \rightarrow (t \in \mathbb{Z}).$$

Demonstração: se *x* = *bt* e *y* = - *at,* logo:

$$ax + by = a(bt) + b(-at) = atb - atb = 0$$

, nota-se imediatamente que as equações paramétricas de *x* = *bt* e *y*= - *at,* com *t* ∈ $\mathbb{Z}$, dão solução a equação *ax* + *by* = 0.

Suponha-se agora que x e y são inteiros satisfazendo ax + by = 0. Então ax = - by. Logo b | (ax). Como a e b são primos entre si, tem-se que b | x.

Existe então t ∈ $\mathbb{Z}$ tal que *x = bt*. Substituindo x = bt em ax = - by, obtém-se, y = - at. Portanto, x = bt e y = - at, para algum t ∈ $\mathbb{Z}$

A equação diofantina ax + by = 0 é o que se chama de equação linear diofantina homogênea correspondente à equação ax + by = c (não homogênea se c ≠ 0).

Sendo d = m.d.c. (a, b), a propriedade I estabelece que a equação diofantina ax + by = c tem solução se, e somente se, d | c, nota-se que a equação ax + by = c é equivalente a equação:

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{c}{d}$$

, de coeficientes todos inteiros, já que d | a e d | b. Além disso, os inteiros a / d e b / d são primos entre si: como existem inteiros *r* e *s* tais que *ra + sb = d*, temos *r(a/d) + s(b/d) = 1,* (Relação de Bézout).

Pelas observações feitas acima, pode-se nos restringir ao estudo de equação diofantinas ax + by = c assumindo a e b primos entre si.

Teorema: Sejam a, b e c inteiros, com a e b primos entre si. Seja (x_0, y_0) uma solução da equação diofantina ax + by = c.

Então as soluções dessa equação são dadas pelas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ y = y_0 - a.t \end{cases}, \text{ com } t \in \mathbb{Z}$$

Demonstração: Seja (x_0, y_0) uma solução da equação diofantina ax + by = c.

Se x = x_0 + bt e y = y_0 - at, com t ∈ $\mathbb{Z}$, então:

$$ax + by = a(x_0, y_0) + b(y_0 - at)$$

$$= ax_0 + abt + by_0 - bat$$

$$= ax_0 + by_0 = c$$

, e, portanto (x, y) é uma solução da equação diofantina ax + by = c.

Supondo-se agora que (x, y) é solução da equação diofantina ax + by = c. Tem-se então:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ ax_0 + by_0 = c \end{cases}$$

, e assim:

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) &= ax - ax_0 + by - by_0 \\ &= (ax + by) - (ax_0 + by_0) \\ &= c - c = 0. \end{aligned}$$

Logo, $(x - x_0, y - y_0)$ é solução da correspondente equação homogênea ax + by = 0. Pela propriedade II, existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que x - x0 = tb e y - y0 = - ta, ou seja

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ y = y_0 - a.t \end{cases}, \text{ para algum } t \in \mathbb{Z}.$$

Diante do exposto, vale ressaltar a relevância de se apresentar algumas aplicações que envolvem a temática da pesquisa discutida, especificamente ao que faz alusão ao ensino médio, assim, pode-se verificar a maior abrangência do trato deste trabalho quando se observa a sua aplicação contextualizada com a própria realidade escolar e extraescolar do educando.

3.1 ALGUMAS APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Muitas vezes o aluno do nível médio de ensino se depara com certos tipos de questões contextualizadas de sua própria realidade, desse modo exigindo-se alguns tipos de estratégias para resolvê-las. O saber matemático deve ser considerado como um conjunto de conceitos no qual o aluno percebe que para resolver tais situações-problema é necessário recorrer a conhecimentos já adquiridos e que precisam ser interligados, como por exemplo: máximo divisor comum, o algoritmo de Euclides, combinações lineares e sistema de inequações de 1º grau, que é o formato de uma equação diofantina linear do tipo ax + by = c.

De acordo com Polya (2006), a resolução de situações-problema, pode ser de caráter modesto, porém, se o mesmo desafiar a curiosidade e colocar em jogo a capacidade de raciocínio lógico do aluno por meio de suas próprias estratégias, vivenciará a tensão e se deleitará do triunfo do sucesso. A seguir alguns exemplos de situações-problema envolvendo as equações de Diofanto.

1º Problema: Se um funcionário ganha R$ 510,00 em tíquetes alimentícios, com quantias de R$ 20,00 ou R$ 50,00 cada tíquete. De quantas maneiras podem ser formados o carnê de tíquetes deste funcionário?

Resolução: se x indica o total do número de tíquetes de R$ 20, 00 e y o total de tíquetes de R$ 50, 00, logo, pode-se equacionar esse problema da seguinte forma: 20x + 50y = 510. É simples de notar que o m.d.c., (50, 20) = 10 e a equação dada é solucionável pois o m.d.c. (50, 20) = 10 | 510, ou seja, o m.d.c. entre 50 e 20 é igual a 10, e 10 divide 510. Utilizando a propriedade II e simplificando a equação 20x + 50y = 510 por 10, obtém-se a equação equivalente:

$$2x + 5y = 51 \text{ onde mdc } (5, 2) = 1$$

Aplicando o Algoritmo de Euclides tem-se:

Tabela 2. Algoritmo de Euclides

	q_1	
a	b	
r_1		

Fonte: Os autores

Tabela 3. Algoritmo de Euclides:

	2	2
5	2	1
1	0	

Fonte: Os autores

$$a = b.\, q_1 + r_1 \Longrightarrow r_1 = a - b.\, q_1$$

$$5 = 2.2 + \underline{1} \Longrightarrow \underline{1} = 5 - 2.2$$

Agora, escrevendo 1 como combinação linear de 2 e 5 tem-se:

$$1 = 5 - 2.2$$
$$1 = 2.(-2) + 5.(1)$$
$$x_0 \Longleftarrow \qquad\qquad \Longrightarrow y_0$$

Utilizando a propriedade II na equação equivalente 2x + 5y = 51 já que o m.d.c. (5, 2) = 1 as demais soluções são dadas pelas equações paramétricas:

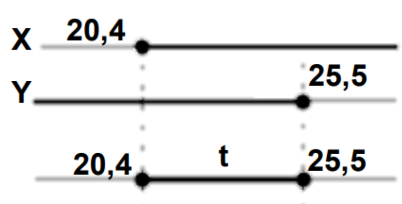
$$\begin{cases} x = x_0 + b.t = -102 + 5t \\ y = y_0 - a.t = 51 - 2t \end{cases}, \quad \text{com } t \in \mathbb{Z}$$

Resolvendo o sistema de inequações, tem-se:

$$\begin{array}{c} x = x_0 + b.t \\ x = -102+5.t \\ -102+5.t \geq 0 \\ 5t \geq 102 \\ t \geq \frac{102}{5} \\ t \geq 20,4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} y = y_0 - a.t \\ y = 51-2t \\ 51-2t \geq 0 \\ -2t \geq -51.(-1) \\ 2t \leq 51 \\ t \leq \frac{51}{2} \\ t \leq 25,5 \end{array}$$

Calculando os intervalos inteiros das inequações entre x, y e t tem-se:

Figura 2. Intersecção



Fonte: Os autores

Logo: t $\geq$ 20,4 e t ≤ 25,5, no que resulta no conjunto solução {t ∈ ℤ | 21 ≤ t ≤ 25}, assim t ∈ {21, 22, 23, 24, 25}, ou seja, se tem 5 possibilidades para os carnês, calculando cada possibilidade tem-se:

Para t = 21, tem-se um carnê com 3 tíquetes de R$ 20,00 e 9 tíquetes de 50,00.

Para t = 22, tem-se um carnê com 8 tíquetes de R$ 20,00 e 7 tíquetes de R$ 50,00.

Para t = 23, tem-se um carnê com 13 tíquetes de R$ 20,00 e 5 tíquetes de R$ 50,00.

Para t = 24, tem-se um carnê com 18 tíquetes de R$ 20,00 e 3 tíquetes de R$ 50,00.

Para t = 25, tem-se um carnê com 23 tíquetes de R$ 20,00 e 1 tíquete de R$ 50,00.

Substituindo os valores de t nas equações paramétricas x = $x_0 + b.t = -102 + 5t$ e y = y_0 – at = 51 - 2t, obtém-se os valores de x e y. Verificando as proposições que definem a quantidade de tíquetes de R$ 20,00 e R$ 50,00 percebe-se que quanto maior o valor de t maior será o número de tíquetes de R$ 20,00 e menor os tíquetes de R$ 50,00, assim como o inverso também é válido.

2º Problema: Propõe-se a uma pessoa que multiplique por 31 o número que indica o mês correspondente em que a mesma nasceu, e multiplique por 12 o dia do seu nascimento, e some os resultados das multiplicações. Com o total da soma lhe direi o dia e o mês de seu aniversário.

O educando que tenha efetuado com êxito o processo descrito no enunciado, diz que o resultado obtido foi o número 170. Observa-se que a equação diofantina linear será 31x + 12y=170 e que admite solução no conjunto dos números inteiros, já que o m.d.c. (31,12) =1, e 1 divide 170, pois, sabe-se que uma equação diofantina ax + by = c, tem solução (inteira) se, e somente se, o m.d.c., (a, b) divide c. Utilizando o algoritmo de Euclides tem-se que:

Tabela 4. Algoritmo de Euclides

	2	1	1	2	2
31	12	7	5	2	1
7	5	2	1	0	

Fonte: Os autores

Reescrevendo as divisões sucessivas em função dos restos obtém-se:

31 = 12.2 + 7 ⟹ 7 = 31 - 12.2
12 = 7.1 + 5 ⟹ 5 = 12 - 7.1
7 = 5.1 + 2 ⟹ 2 = 7 - 5.1
5 = 2.2 + 1 ⟹ 1 = 5 - 2.2

Agora reescrevendo 1 como combinação linear entre 31 e 12, tem-se:

$1=5-\underline{2}.2$
$1=5-(7-5.1).2$
$1= \underline{5}.3 -7.2$
$1 = (12-7.1).3 -7.2$
$1=12.3 -7.(3) -7. (2)$
$1=12.3-\underline{7}.(5)$
$1=12.3 – (31-12.2).5$
$1=12.(3)-31.5+12(10)$
$1=12.(13) -31.5$
$1=31.(-5) +12.(13)$

multiplicando a equação por 170, obtém-se:

$$170=\underset{x_0}{31.(-850)} + \underset{y_0}{12.(2210)}$$

Na equação 31x + 12y = 170 já que o m.d.c. (31, 12) = 1, e ambos são primos entre si, as demais soluções são dadas pelas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t = -850 + 12t \\ y = y_0 - a.t = 2210 - 31t \end{cases}, \quad para\ t \in \mathbb{Z}$$

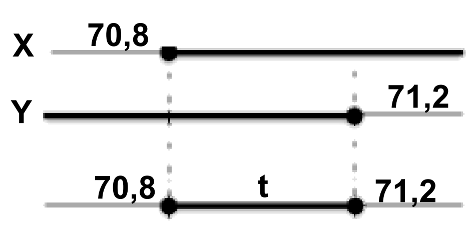
Resolvendo o sistema de inequações, tem-se:

$$\begin{gathered} x = x_0 + b\,.\,t \\ x= - 850+12.t \\ - 850+12.t \geq 0 \\ 12t \geq 850 \\ t \geq \frac{850}{12} \\ t \geq 70{,}8 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} y = y_0 + b\,.\,t \\ y= 2210 -31t \\ y= 2210 – 31.t \\ 2210 - 31t\geq 0 \\ - 31t \geq - 2210\ .\ (-1) \\ 31t \leq 2210 \\ t \leq \frac{2210}{31} \\ t \leq 71.2 \end{gathered}$$

Calculando os intervalos inteiros das inequações entre x, y e t tem-se:

Figura 3. Intersecção



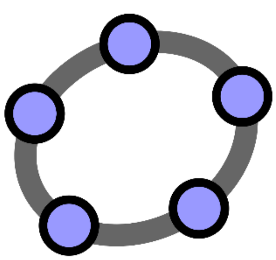
Fonte: Os autores

Como t é um número inteiro, tem-se que só pode ser t = 71. Substituindo o valor de t nas equações: x = - 850 + 12t e y = 2210 – 31t, obtém-se os valores: x = - 850 +12. (71), logo x = 2. Sabe-se que x representa o mês, portanto, o mês é fevereiro, e y = 2210 - 31. (71), logo y = 9, sabemos que y representa o dia, portanto, esta pessoa nasceu no dia 9 de fevereiro. Neste sentido, verificar-se-á no próximo item algumas ferramentas tecnológicas no auxílio das EDL.

4 ALGUMAS FERRAMENTAS TECNOLÓGICAS NO AUXÍLIO DAS EDL

Alguns *softwares* auxiliam o educando na hora de visualizar e calcular as equações diofantinas lineares com duas variáveis, é o caso do *software Geogebra* e o aplicativo para celular Equações Diofantinas*.*

Figura 4. *Software* Geogebra



Fonte: geogebraufrb

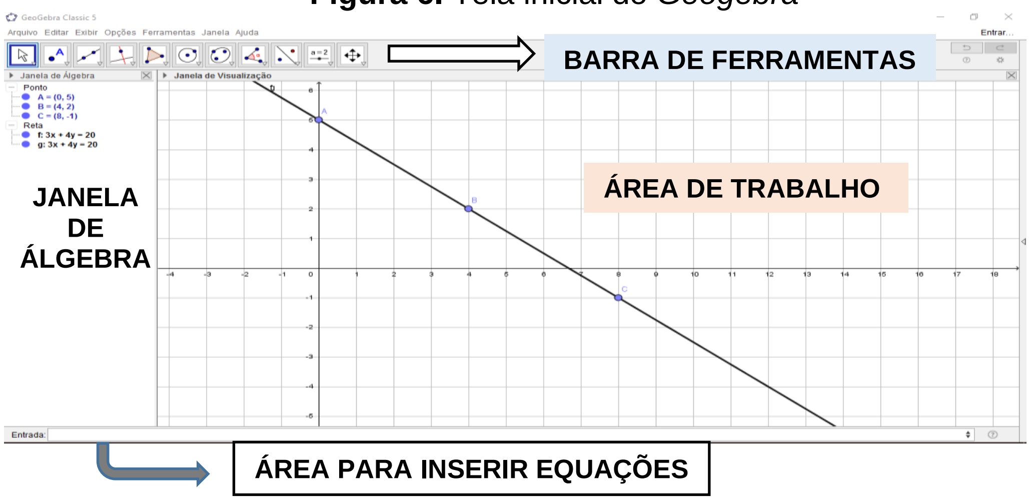
Figura 5. Aplicativo Equações Diofantinas

Fonte: Google Play

O Geogebra é um poderoso programa matemático desenvolvido por Markus Hohenwarter que proporciona uma abordagem dinâmica, unindo os conceitos de geometria e álgebra em sua interface. Essa ferramenta versátil permite a construção e visualização de diversos conceitos matemáticos, tornando-se particularmente valiosa no contexto das Equações Diofantinas Lineares (EDL). A capacidade do Geogebra de representar graficamente as equações é um recurso vantajoso para a compreensão das

EDL. Para ilustrar esse benefício, considere a seguinte equação diofantina como exemplo: 3x + 4y = 20. Se esta equação tiver soluções inteiras, o Geogebra permite a construção de um gráfico que facilita a visualização das possíveis soluções para 'x' e 'y', ambos inteiros.

Figura 6. Tela inicial do *Geogebra*



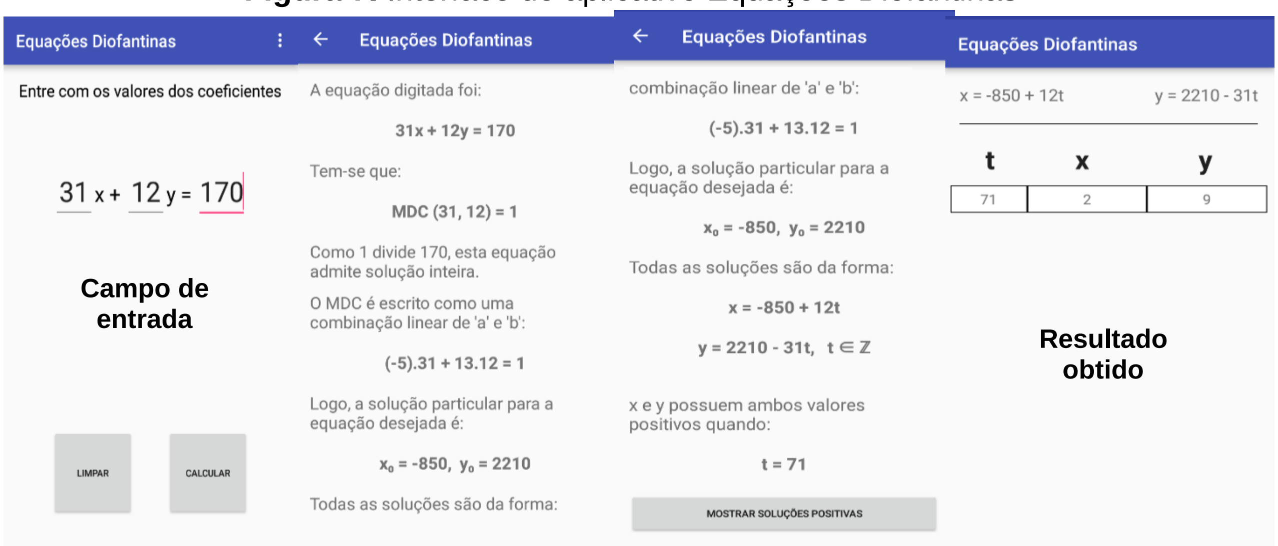
Fonte: Os autores

Após a inserção da equação no *software*, pode-se visualizar o gráfico da mesma inserida, e que se trata de uma reta, pois, existem infinitos valores para x e y que irão satisfazer a EDL citada acima. Para encontrar soluções inteiras através do gráfico, é necessário que a reta corte exatamente o ponto de encontro do par ordenado entre x e y, como demonstrado graficamente acima.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN' s (1998), já ressaltam a relevância do auxílio dos meios tecnológicos para a educação, tendo em vista a otimização da qualidade do processo de ensino-aprendizagem, também certificam que a utilização da tecnologia "permite criar ambientes de aprendizagem que fazem sugerir novas formas de pensar e aprender" (PCN' s, 1998, p. 147).

O aplicativo Equações Diofantinas foi criado por Lucas Azevedo, e é voltado exclusivamente para a plataforma androide com o objetivo de calcular as EDL com duas variáveis inteiras. Relembrando o problema resolvido no capítulo anterior, em específico o do aniversário (**2º problema**), agora o mesmo será resolvido de forma instantânea através de tal aplicativo. Este aplicativo também fornece informações importantes sobre os cálculos feitos. Da esquerda para a direita está sendo mostrado o campo de entrada, o resultado do m.d.c. a combinação linear de a e b, a solução particular e o resultado final.

Figura 7. Interface do aplicativo Equações Diofantinas



Fonte: Os autores

Para o aluno do ensino médio, desvendar o dia e o mês no qual a pessoa perguntada nasceu, basta ter em mente a ideia da tabela mostrada anteriormente em que o coeficiente de x influencia diretamente na solução particular de y, como também o coeficiente de y influencia diretamente na solução particular de x, logo, após clicar na opção mostrar soluções positivas, se concluirá que a pessoa perguntada nasceu no dia 9 de fevereiro.

Observação: esta ferramenta possui uma falha em específico neste problema do aniversário, pois, se for feito o teste com qualquer pessoa que nasceu em janeiro, não será encontrado nenhum resultado, pois, o intervalo é tão pequeno que o aplicativo não consegue distingui-lo.

D´Ambrósio (1986), ressalta o fato no qual diversas situações o educando mostra-se mais satisfeito com a utilização de tecnologias como *softwares* e aplicativos do que o próprio educador, uma vez que, nos últimos períodos, tanto as crianças, quanto jovens, usufruem da tecnologia em jogos e brincadeiras, que são colocados por meio dela. Assim, no tópico seguinte será apesentada a metodologia da pesquisa em questão.

5 METODOLOGIA

Esta pesquisa é bibliográfica e de base qualitativa, ou seja, a pesquisa bibliográfica pauta-se em materiais e ideias já veiculadas por meio de livros, periódicos entre outros documentos, e que servem de apoio e embasamento para o desenvolvimento ou refutação de outras pesquisas científicas. O objetivo desse tipo de pesquisa é colocar o autor da nova pesquisa diante de informações sobre o assunto de seu interesse. Por intermédio dela, o pesquisador possui grandes chances de não desenvolver trabalho em vão, ou seja, ele vai construindo caminhos que vão ao encontro da temática por ele abordada.

É notório perceber que, nenhuma pesquisa se inicia sem partir da pesquisa bibliográfica, pois é necessário coletar informações em outras fontes disponíveis, seja ao construir uma pesquisa inovadora ou ao revalidar ou refutar outras pesquisas científicas. Na pesquisa bibliográfica o pesquisador escolhe trabalhar com materiais, artigos científicos e entre outras referências teóricas já analisadas e discutidas, visto que, existe pesquisa inovadora e pesquisa de reafirmação de ideias e valores na qual se busca verificar a veracidade ou reafirmação do assunto tratado por outro pesquisador.

Neste sentido, fez-se necessário selecionar materiais que abordassem com clareza o tema proposto. Assim, foram selecionadas criteriosamente várias leituras de livros, periódicos, imagens, monografias, artigos científicos, e posteriormente fez-se o levantamento de dados relevantes, por intermédio de anotações e fichamentos, para a concretude do trabalho em questão. Nesse viés, a pesquisa qualitativa não está associada a números, não busca quantificar dados, não está preocupada em explorar números e nem os obter como resultado, mas preocupa-se em produzir informações e compreender o caráter das evidências que possam levar a possíveis reflexões.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo, enfatizamos o uso das Equações Diofantinas, com foco em suas aplicações no cotidiano dos estudantes do ensino médio, destacando a versatilidade com a qual elas podem resolver problemas do dia a dia. No entanto, é importante reconhecer que, embora as equações Diofantinas não façam parte dos currículos tradicionais do ensino fundamental e médio, esta pesquisa demonstra que elas podem ser introduzidas aos alunos de maneira significativa.

De acordo com a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (1982), a aprendizagem se torna significativa quando os alunos conseguem relacionar o conhecimento escolar a situações práticas em suas vidas cotidianas. Portanto, as Equações Diofantinas Lineares podem ser apresentadas aos estudantes, capacitando-os de forma sistemática para resolver os problemas que eles enfrentam em seu dia a dia.

É fundamental reconhecer que não estamos propondo a inclusão das Equações Diofantinas Lineares como um componente curricular obrigatório, mas sim sugerindo sua aplicação na resolução de situações cotidianas com as quais os alunos se deparam regularmente. Ao adquirir conhecimento sobre esse tópico, os estudantes estarão mais preparados para investigações matemáticas e para formular suas próprias conclusões.

Portanto, fica evidente que a incorporação de situações-problema que permitem a aplicação da teoria e o desenvolvimento do raciocínio lógico é benéfica para o ensino e aprendizagem da matemática. A utilização das equações Diofantinas Lineares no ensino médio se revela de suma importância para aprimorar o conhecimento matemático como um todo, contribuindo para a formação de estudantes mais competentes e confiantes em lidar com desafios matemáticos em suas vidas.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. D. **Teoria Elementar dos Números**. São Paulo: Nobel, 1981.

AUSUBEL, D.P. **A aprendizagem significativa:** a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

AZEVEDO, L. **Equações Diofantinas.** Disponivel em: < https://play.google.com/store/apps/details?id=com.lucasazevedo.android.calcdiofantina&hl=pt_PT> Acesso em: 29. mai. 2018.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 9º. ed. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, 2010.

BRASIL. MEC. SEMTEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, 1998.

BRASIL, MEC. SEMTEC. Parâmetros Curriculares Nacionais de Língua Portuguesa– Ensino Fundamental. **Brasília, DF**, 1998.

D´AMBROSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. 2. ed., Campinas: Ed. Da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas**. São Paulo: Ática, 2007.

EAD, M. **Geogebra**. Disponível em:<http://geogebraufrb.blogspot.com/2016/02/geogebra.html> Acesso em: 29. mai. 2018.

LA ROCQUE, G. PITOMBEIRA, J.B**., Uma Equação Diofantina e Suas Resoluções**, Revista do Professor de Matemática, SP (1991).

MASTIN, L. **Hellenistic mathematics – Diophantus**. Disponível em:< http://www.storyofmathematics.com/hellenistic_diophantus.html> Acesso em 15. mar.2018.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. Disponível em **<**http://www.obmep.org.br**/>** Acesso em: 10.abr. 2018.

POLYA, G**., A Arte de Resolver Problemas**. Editora interciência, Rio de Janeiro, RJ, 2006.

SAMPAIO, J. C. V. **Introdução à Teoria Dos Números**. São Carlos: EDUFSCAR, 2008.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - (UFC)**.** Disponível em < http://www.ufc.br/> Acesso em: 18. mai.2018.

AZEVEDO, Lucas. **Equações Diofantinas – Apps no Google Play**. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.lucasazevedo.android.calcdiofantina &hl=pt_PT. Acesso em: 4 jul. 2023.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. [S. l.]: EDGARD BLUCHER, 2012. ISBN 9788521206415.

BRAZIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. (ed.). **Parâmetros curriculares nacionais: Ensino médio**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. 2. ed. Campinas: Ed. Da Universidade Estadual de Campinas, 1986. 115 p.

DANTE, Luiz .R. **Didática Da Resolução De Problemas De Matemática**. 12. ed. São Paulo: Ática. 144 p. ISBN 8508032196.

DIOPHANTUS of Alexandria. Disponível em: https://www.storyofmathematics.com/hellenistic_diophantus.html/. Acesso em: 4 jul. 2023.

FILHO, Edgard de Alencar. **Teoria Elementar Dos Números**. São Paulo: Nobel, 1981. 386 p. ISBN 35-213-0040-9.

GEOGEBRA. Disponível em: http://geogebraufrb.blogspot.com/2016/02/geogebra.html. Acesso em: 4 jul. 2023.

MORREIRA, Marcos Antônio; MASINI, Elcie .F Salzano. **A aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel.** São Paulo: Moraes, 1982. 112 p.

OLIMPÍADA Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP | Somando novos talentos para o Brasil. Disponível em: http://www.obmep.org.br/. Acesso em: 4 jul. 2023.

PÓLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**. [S. l.]: Interciência, 1978. ISBN 9788571931367.

PORTAL da UFC - Universidade Federal do Ceará. Disponível em: https://www.ufc.br/. Acesso em: 4 jul. 2023.

ROCQUE, Gilda de La; PITOMBEIRA, João Bosco. **Uma equação diofantina e suas resoluções**. Revista do Professor de Matemática, v. 19, p. 39-47, 1991. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/19/9.htm. Acesso em: 2 jul. 2023.

SAMPAIO, João Carlos Vieira; CAETANO, Paulo Antônio Salvani. **Introdução a teoria dos números - Um curso breve.** [S. l.]: EdUFSCar, 2021. 107 p. ISBN 8576001276.